ANGOLI, TRIANGOLI E MISURE: UN APPROCCIO INTERDISCIPLINARE PER L'INNOVAZIONE DIDATTICA

Scientia, vol. IV, n. 2 (dicembre 2025)
DOI: 10.61010/2974-9433-202502-07
ISSN: 2974-9433

Received 06/06/2025 | Accepted 28/07/2025 | Published online 28/11/2025

Argante Ciocci
Liceo Vitruvio, Avezzano
argante1971@gmail.com

Veronica Gavagna
Università di Firenze
veronica.gavagna@unifi.it

Flavia Marcacci
Università di Urbino
flaviamarcacci@gmail.com

Sunto

La storia della scienza può rivelarsi una disciplina particolarmente utile quando si tratta di costruire approcci nuovi e stimolanti per trattare contenuti spesso affrontati all'interno di un singolo ambito disciplinare. Tra questi, la trigonometria si mostra come un capitolo delle conoscenze matematiche necessario per molte scienze ma spesso affrontato in modo disattento ai legami con saperi artistici, tecnici e umanistici. In questo contributo si presenta il progetto *Angoli, triangoli e misure: un approccio interdisciplinare per l'innovazione didattica* svolto nell'a.s. 2024/25 online e rivolto a docenti delle scuole superiori di secondo grado. Il progetto era finalizzato alla comprensione dello sviluppo e dell'uso di conoscenze trigonometriche nel corso della storia, offrendo spunti interdisciplinari e laboratoriali.
Parole chiave: Trigonometria, angoli, triangoli, matematica, filosofia, letteratura

Abstract

The history of science can prove a beneficial discipline for constructing new and challenging approaches to dealing with content often addressed within a single subject area. Among these, trigonometry is a chapter of mathematical knowledge necessary for many sciences but often approached in a way that is inattentive to links with artistic, technical, and humanistic knowledge. In this contribution, we present the project *Angles, Triangles and Measurements: an interdisciplinary approach for teaching innovation* (projected realized in Italian: *Angoli, triangoli e misure: un approccio interdisciplinare per l'innovazione didattica*),

carried out in A.S. 2024/25 and aimed at high school teachers. The project aimed to understand the development and use of trigonometric knowledge throughout history, offering interdisciplinary and laboratory insights.
Keywords: trigonometry, angles, triangles, mathematics, philosophy, literature.

Introduzione

Le nozioni trigonometriche fanno parte dei ferri del mestiere di ogni matematico, essendo la trigonometria la disciplina che studia gli angoli o archi di cerchio, da cui dipendono o a cui sono correlate proprietà o dimensioni di triangoli e altre figure geometriche. Le funzioni trigonometriche, inoltre, sono fondamentali per descrivere molti fenomeni periodici. È dunque essenziale accedere a queste conoscenze, a qualunque livello si stia studiando la matematica e le sue applicazioni. In particolare, la trigonometria è insegnata nelle scuole secondarie di secondo grado, mediante l'introduzione di nozioni elementari via via più articolate e complesse, ma spesso con un approccio strettamente procedurale e strumentale [Skemp, 1976]. Questo approccio spiega in parte perché gli argomenti specifici della trigonometria – dalle definizioni degli angoli, ai teoremi relativi ai triangoli, alle funzioni di angoli speciali e generici, alle formule di somma e differenza, fino allo studio di funzioni circolari e alle equazioni trigonometriche – non raccolgano troppo entusiasmo tra studenti e studentesse, al di là di chi si mostra particolarmente interessato. Il ciclo di incontri aveva lo scopo di offrire ai docenti alcuni spunti di carattere storico e interdisciplinare per superare questa difficoltà e rendere più coinvolgente e stimolante l'apprendimento della trigonometria.

L'importanza della storia della matematica nella formazione di un docente (di matematica, ma non solo) nonché della sua efficacia come possibile risorsa didattica per costruire significati matematici e un atteggiamento positivo nei confronti della disciplina – ad ogni livello scolare – è da decenni una prolifica linea di ricerca che ha prodotto studi, raccolte di esperienze e convegni internazionali in cui esperti di didattica e di storia si confrontano con docenti di ogni grado scolare. Dare conto di tutta la letteratura scientifica sul tema non è possibile: ci limitiamo a ricordare i numeri monografici dedicati a questo tema da due prestigiose riviste internazionali di didattica della matematica: *Educational Studies in Mathematics* [Furinghetti, Radford, Katz, 2007] e *ZDM Mathematics Education* [Chorlay, Clark, Tzamakis, 2022] e a citare la *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (ESU), un convegno che si svolge ogni due anni dal 1993 e che produce volumi di atti scaricabili dalla pagina dell'*International Study Group* on the relations between *History and the Pedagogy of Mathematics*, https://hpm.sites.uu.nl/esu/.[1]

Alla luce di queste considerazioni, abbiamo fatto proprie le finalità condivise nella comunità dei soci della SISS, in particolare del Gruppo Scuola, cercando di offrire un percorso basato sul metodo e i contenuti tipici della storia della scienza, con un affaccio particolare alla storia della matematica, pur senza tralasciare i nessi interdisciplinari provenienti dal pensiero filosofico, dalla letteratura, dall'arte. Il progetto nasce, dunque, avendo come primo obiettivo di supportare e fornire elementi utili all'insegnamento di contenuti relativi alla trigonometria mediante 'altri' contenuti per declinarli in chiave didattica multifocale. A tal fine, durante il progetto sono stati forniti ai partecipanti vari riferimenti bibliografici e laboratoriali. Sono state offerte riflessioni di carattere tecnico-matematico, insieme a quelle di natura storico-filosofica.

Il secondo obiettivo è stato, in conseguenza, quello di creare un vero e proprio contesto interdisciplinare, volto a fare interagire diversi saperi e competenze mediante una lettura storica della trigonometria. In questo modo, si è voluto mettere in rilievo sia il rapporto con le fonti primarie e la loro ricezione della storia della matematica, sia alcuni modi per attualizzare le nozioni originarie mediante linguaggi oggi in uso per approcciare le questioni trigonometriche.

In terzo luogo, l'intento del progetto è di mostrare come un approccio storico alla matematica e in generale alla scienza sia utile per sollecitare un atteggiamento positivo verso contenuti apparentemente ostici. Con le stesse finalità, si è mostrato anche come la dimensione laboratoriale è utile anche in un processo di *faculty development* per corsi universitari, in particolare proponendo la costruzione e manipolazione di strumenti scientifici basati su nozioni trigonometriche.

Alla fine del progetto i partecipanti si sono confrontati sull'eventuale elaborazione di un'Unità didattica di apprendimento (U.D.A.) facendo interagire le varie abilità e prospettive didattiche e disciplinari a loro proprie e basandosi su alcuni spunti ricevuti durante le lezioni frontali. Questa possibilità è stata fortemente influenzata dalla tipologia di partecipanti, principalmente provenienti dall'area matematica e scientifica e da contesti scolastici in cui la sperimentazione interdisciplinare in ambito storico-matematico è già stata collaudata. Il presente contributo si presenta in forma di report e intende ripercorrere il percorso svolto. La sezione 1 è dedicata al problema delle origini della trigonometria, alla definizione stessa di questa disciplina e alla sua collocazione nel panorama della storia antica, con espresso riferimento al contribu-

1 Su questi temi ci limitiamo infine a ricordare inoltre i ben noti lavori di Abraham Arcavi [Arcavi, Masami, 2007], [Arcavi, 2023], [Arcavi, 2025] e alcuni significativi volumi quali [Katz, 2000], [Fauvel, Van Maanen, 2002], [Barbin *et al.*, 2018], [Barbin *et al.*, 2025].

to di Tolomeo. La sezione 2 si concentra sul ruolo delle nozioni trigonometriche nella misurazione del tempo e nell'orientamento spaziale, proponendo in chiave didattica alcuni noti episodi della matematica antica e moderna. La sezione 3 è dedicata a mostrare la connessione tra trigonometria e astronomia nell'antichità, collegando la matematica al contesto delle origini del pensiero filosofico, in particolare alle speculazioni relative alla sfericità del cosmo. Si conclude riportando la ricca discussione con i partecipanti del corso, menzionando alcune esperienze particolari.

Le origini della trigonometria attraverso le fonti storiche

Individuare le origini della trigonometria non è semplice, in parte perché – come spesso succede in matematica – molti dei risultati che oggi riconosciamo come trigonometrici sono stati sviluppati in diversi domini di conoscenza e solo successivamente riletti da questo nuovo punto di vista. L'esempio forse più noto è la cosiddetta 'relazione fondamentale della trigonometria':

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

che altro non è se non la reinterpretazione in chiave trigonometrica della proposizione 47 del Libro I degli *Elementi* di Euclide, nota più comunemente come 'Teorema di Pitagora'. Il termine 'trigonometria', del resto, non è di grande aiuto nell'esplorazione delle origini: coniato alla fine del Cinquecento da Bartolomeo Pitisco, evoca la misurazione dei triangoli, ma i triangoli non sono al centro degli studi trigonometrici classici e medievali, basati invece sulle corde di un cerchio. Nel XVI secolo, inoltre, il termine identificava una disciplina che aveva ormai uno statuto epistemologico ben definito e autonomo, e non era più confinata a svolgere una funzione ancillare nei confronti dell'astronomia: era una scienza, insomma, sensibilmente diversa dalla trigonometria antica. Dovendo dunque confrontarci con una disciplina che ha assunto varie fisionomie nel corso del tempo, anche rileggendo e facendo propri risultati di altri domini, è necessario stabilire dei criteri per facilitare la ricostruzione della sua storia. Secondo Glen Van Brummelen, autore di alcune monografie sulla storia della trigonometria e in particolare del volume *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The Early History of Trigonometry* [Brummelen, 2009][2], per stabilire che un risultato sia effettivamente trigono-

2 Per eventuali ampliamenti dei temi trattati nell'incontro si rimanda a [Van Brummelen, 2021] e [Van Brummelen, 2013]. Il primo dei due volumi costituisce il seguito di [Van Brummelen, 2009] e tratta la storia della disciplina in Occidente nei secoli XV-XIX, con una digressione sulla trigonometria cinese; il secondo volume tratta invece della storia della trigonometria sferica.

metrico è necessario che siano soddisfatti due criteri: la capacità (o l'interesse) di misurare l'inclinazione di una retta sull'altra – per esempio misurando gli angoli formati dalle due rette incidenti – e la capacità (o l'interesse) di misurare segmenti. Assumendo questo duplice criterio, ad esempio, la geometria egizia 'delle piramidi' o alcune proposizioni sui lati dei triangoli degli *Elementi* di Euclide, non sono risultati ascrivibili alla trigonometria. In altre parole, non hanno carattere trigonometrico né il problema 58 del papiro di Rhind, in cui si chiede di determinare il *seqed* di una data piramide (sostanzialmente, la misura della pendenza delle facce), né la proposizione 13 del Libro II degli *Elementi,* che studia la relazione tra i lati di un triangolo acutangolo e l'angolo compreso tra due di essi. Nel primo esempio lo scriba non ricorre alla misura degli angoli, nel secondo Euclide non considera la misura dei segmenti (del resto gli *Elementi* sono un trattato di geometria speculativa): questi esempi non sono dunque da assumersi come risultati trigonometrici anche se oggi potrebbero facilmente essere riletti in questi termini.

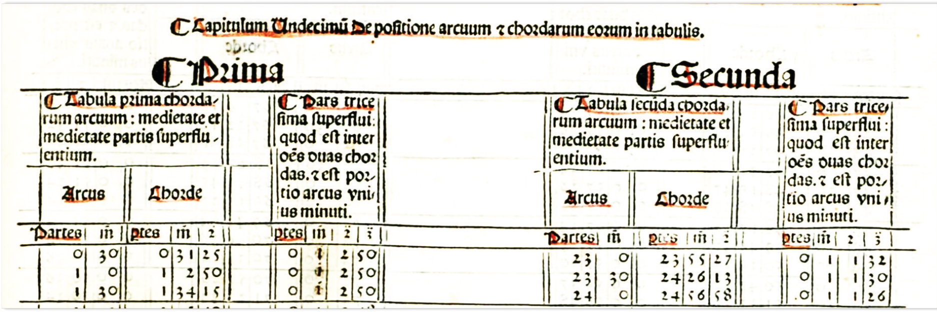
Chiariti i criteri di indagine, un breve *excursus* delle opere greche che attorno al III secolo a.C. hanno segnato il passaggio da un approccio qualitativo a uno quantitativo all'astronomia, ha introdotto l'opera attorno alla quale si è sviluppata la prima parte del primo incontro: l'*Almagesto* di Tolomeo (II sec.). L'*Almagesto*, di cui si può consultare l'edizione inglese moderna curata da G. J. Toomer [1998] oppure si possono esplorare alcune edizioni storiche digitali in rete, presenta una pressoché completa esposizione del sapere astronomico, che ha le sue basi matematiche nel primo dei tredici libri, un autentico trattato di trigonometria. Poiché, come si è detto, il parametro fondamentale della trigonometria greca era la corda del cerchio, era necessario fornire agli astronomi una tavola in cui erano calcolate, in funzione del raggio, le lunghezze delle corde che sottendono gli archi di un cerchio fissato.

Lo scopo del primo libro dell'*Almagesto*, dice Tolomeo, è dunque quello di illustrare gli strumenti e i metodi matematici per costruire la tavola delle corde, in modo che chiunque sia poi in grado di riprodurla o di crearne altre in maniera autonoma. Il dichiarato scopo didattico rende peraltro questo primo libro particolarmente adatto a una trasposizione in aula, eventualmente mediata dallo studio delle fonti primarie, ancorché in traduzione. Poiché il problema è quello di calcolare la lunghezza delle corde in funzione del raggio del cerchio fissato, Tolomeo comincia a determinare le lunghezze dei lati di alcuni poligoni regolari inscritti nel cerchio, come il pentagono e il decagono, basandosi su proposizioni del XIII libro degli *Elementi*. Tuttavia, per poter calcolare, ad esempio, la lunghezza di una corda che sia somma o differenza di corde note, deve inventarsi uno strumento di geometria che non trova negli *Elementi*: il cosiddetto 'Teorema di Tolomeo'. Le applicazioni di questo teorema alla determinazione della corda somma o della corda differenza di corde note, si possono facilmente reinterpretare come le ben note formule trigonometriche rispettivamente del seno della somma e della differenza di angoli. Ulteriori applicazioni del teorema, ad esempio alla bisezione degli archi, consentono infine a Tolomeo di completare la tavola, tabulando tutte le lunghezze delle corde di un semicerchio procedendo di mezzo grado in mezzo grado. Riproporre in aula la costruzione della tavola tolemaica permetterebbe di presentare la trigonometria come risposta a un problema storico autentico, dando così senso concreto a formule spesso memorizzate meccanicamente, ma vuote di significato. L'idea di costruire significati matematici attraverso l'approccio storico ha guidato anche la seconda parte dell'incontro, dedicata a una rapida panoramica della trigonometria indiana e araba, di cui si può discutere in classe anche in chiave inclusiva. Come abbiamo detto, la corda era un parametro naturale dal punto di vista geometrico, ma dal punto di vista del calcolo l'assunzione della mezza corda semplificava molto i calcoli: la contaminazione tra la trigonometria indiana, che aveva alle spalle un'antichissima tradizione, e quella greca portò all'introduzione di nuovi parametri: il seno (la mezza corda), il coseno e il senoverso. Attorno all'VIII secolo, i testi astronomici – indiani e greci – cominciarono a essere tradotti in arabo e la loro rifusione diede origine a una trigonometria nella quale i nuovi parametri si coniugavano con i metodi di calcolo tolemaici. La necessità della costruzione di meridiane per determinare le ore della preghiera fu poi uno dei fattori che rese necessario lo studio delle ombre degli gnomoni fissati a una parete o conficcati nel terreno, che portò all'introduzione delle nuove funzioni che oggi chiamiamo tangente e cotangente, tradotte dall'arabo in latino rispettivamente con gli eloquenti nomi di *umbra recta* e *umbra versa*. L'ultima parte dell'incontro è stata riservata all'analisi di un risultato di Nasīr al-Din al-Tūsī che, in termini moderni, corrisponde alla legge dei seni per i triangoli piani. È stato infine suggerito ai partecipanti di esplorare il vasto mondo della trigonometria araba nel quale si possono trovare risultati e spunti didattici davvero interessanti, come il calcolo della lunghezza del raggio terrestre determinato da al-Bīrūnī[3].

Terminata la parte più strettamente teorica, l'incontro si è concluso con la descrizione del plinto, uno strumento scientifico descritto da Tolomeo nel suo *Almagesto* (Libro I, Capitolo 12). Il plinto è uno strumento di tipo meridiano

3 La letteratura sul tema è molto ampia e ci limiteremo a indicare, oltre al citato testo di [Van Brummelen, 2009], anche [Berggren, 2016].

costituito da un muretto verticale costruito sul meridiano per individuare il momento del mezzogiorno, in cui nessuna delle due facce è illuminata. Si tratta di uno strumento di non complessa realizzazione, che si può costruire anche con materiali poveri di facile reperibilità oppure che si può ritrovare in qualche luogo particolare, come la facciata della Chiesa di Santa Maria Novella a Firenze, arricchita di molti strumenti astronomici da Egnazio Danti attorno al 1570.



Capitulum Undecimū De positione arcuum & chordarum eorum in tabulis.

Prima

Tabula prima chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. & est portio arcus unius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m̄	ptes	m̄	2	ptes	m̄	2	3
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50

Secunda

Tabula secūda chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. & est portio arcus unius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m̄	ptes	m̄	2	ptes	m̄	2	3
23	0	23	55	27	0	1	1	32
23	30	24	26	13	0	1	1	30
24	0	24	56	58	0	1	1	26

Fig. 1 - Tavola delle corde, in [Ptolemaeus, 1515]. (Public domain via Wikimedia Commons)

Triangoli e misure di spazio e tempo. Gnomonica e orologi solari

In questa sezione, il filo conduttore del percorso storico e didattico proposto ai partecipanti del corso è l'utilizzo delle ombre nella misura delle distanze spaziali e degli intervalli temporali. Dopo un breve accenno al procedimento di misurazione delle piramidi - che in base alle fonti dossografiche, fu realizzato da Talete - ci siamo soffermati ad analizzare prima il metodo usato da Eratostene per misurare il meridiano terrestre e poi il sistema di coordinate usato da Tolomeo per costruire l'Analemma, utile a realizzare orologi solari. In tutti e tre i casi i procedimenti di misura adottano modelli teorici più o meno sofisticati. Talete (VII-VI sec. A.C.) istituì una semplice similitudine fra triangoli per misurare l'altezza di una piramide a partire da uno gnomone e dalla proiezione della sua ombra. Eratostene (ca 276-194 a.C.), invece, dovette: A) assumere un modello teorico, basato sulla geometria, l'ottica (Eratostene suppone che i raggi del Sole, raggiungendo la superficie terrestre, fossero praticamente paralleli tra loro) e le ipotesi della sfericità della Terra e della piccolezza (trascurabile) del raggio terrestre rispetto alla distanza Terra-Sole; B) usare allo stesso tempo una misura astronomica, un'osservazione fatta a centinaia di Km di distanza, la valutazione empirica della distanza fra Alessandria e Siene e l'assunzione che Siene fosse sullo stesso meridiano di Alessandria; C) introdurre i dati empirici nel modello ed elaborarli [Russo, 2009].

Eratostene sapeva che a Siene (l'attuale Assuan, che si trova a circa 800 Km a sud-est di Alessandria), in un momento preciso dell'anno, il Sole illuminava il fondo dei pozzi. Questo evento si ripeteva ogni anno a mezzogiorno del solstizio d'estate e dipendeva dal fatto che i raggi del Sole cadevano verticalmente. In quel momento, uno gnomone piantato verticalmente a terra non avrebbe proiettato nessuna ombra. Egli notò che ad Alessandria, dove egli viveva, nello stesso giorno e alla stessa ora invece, i raggi del Sole non erano perpendicolari ma formavano un angolo di un cinquantesimo di angolo giro con la verticale (7° 12'). Durante il solstizio d'estate ad Alessandria il rapporto fra l'ombra e lo gnomone è di 1/8. Grazie all'utilizzo del pozzo di Siene, la sola misura ad Alessandria dà il valore dell'angolo fra Alessandria e Siene: 1/50 della circonferenza della Terra. L'angolo di 7,2° è congruente all'angolo che ha per vertice il centro della Terra e i cui lati passano rispettivamente per Alessandria e Siene (infatti sono angoli corrispondenti). Si tratta quindi di una 'distanza angolare' tra le due città, pari a un cinquantesimo dell'angolo giro. Ciò significa anche che la distanza 'effettiva' tra le due città (misurata in 5000 stadi, mediante un'apposita rilevazione) è un cinquantesimo della circonferenza terrestre. Per la lunghezza del meridiano Eratostene ottenne il valore di 250.000 stadi. La misura attuale del meridiano 'medio' è 40.009,152 km. Usando il valore di circa 185 m per uno stadio si ottiene una misura con un errore di quasi il 17%. Se, invece, come la maggioranza degli studiosi, si accetta il valore di 157,5 m per uno stadio si ottiene una misura con un errore di circa 0,8%.

Il progetto di misurazione del meridiano terrestre fu finanziato dai Tolomei. Pertanto, Eratostene ebbe a disposizione le misure delle distanze fra Alessandria e Siene, approntate dalla rete dei *mensores regii* (toparchi e nomarchi). A queste aggiunse i dati raccolti dalla sua spedizione che furono poi matematicamente elaborati mediante l'utilizzo di medie aritmetiche finalizzate a ridurre l'errore (Pappo riferisce dell'opera di Eratostene *Sulle medie* nella sua *Collectio*, VII, 636) [Pappo, 1858]. Dal resoconto di Cleomede [1990, I, 7, 49-52] possiamo dedurre che nell'impresa di Eratostene vennero usati numerosi **orologi solari** per la misura della latitudine. E questa testimonianza costituisce lo spunto per un excursus sulla gnomonica antica. Su questa scienza matematica, oltre al libro IX del *De architectura* di Vitruvio [1997], ci è pervenuto soltanto il *De analemmate* di Tolomeo [II sec. d.C., Tolomeo, 1562].

Anche Tolomeo, come Eratostene costruisce un modello teorico della sfera celeste per individuare, tramite un sistema di coordinate che impiega sei angoli gnomonici, le posizioni del Sole nel corso dell'anno a diverse latitudini. Il contenuto del *De analemmate* è così articolato: Modello geometrico e sistema di coordinate (Capitoli 1-5); Costruzione dell'analemma, che è la proiezione ortografica dei sei angoli gnomonici sul piano del meridiano (Capitoli 6-8); Calcolo trigonometrico del valore degli angoli gnomonici (Capitoli 9-10); Utilizzo dell'analemma per il calcolo degli angoli gnomonici, con squadra e compasso (Capitoli 11-14). Il *De analemmate* fu noto all'Occidente medievale soltanto nella versione latina di Gugliemo di Moerbeke (XIII secolo). Nel Rinascimento, Federico Commandino (1506-1575) ne realizzò un'edizione latina corretta sia nel testo sia nei diagrammi e a questa edizione pubblicata nel 1562 aggiunse il suo *De Horologiorum descriptione* [Tolomeo, 1562] che insegnava a costruire orologi solari di diversi tipi [Ciocci, 2021].

La storia della gnomonica è un'utile premessa per una didattica laboratoriale in ambito matematico finalizzata alla costruzione degli orologi solari. Nella realizzazione del laboratorio degli orologi solari, infatti, vengono introdotte non soltanto nozioni trigonometriche ma anche elementi di teoria delle coniche. Questa sezione del corso si è infatti conclusa con la descrizione dell'esperienza didattica realizzata nel Liceo Scientifico Vitruvio di Avezzano e concretizzatasi con la costruzione di una vera e propria stazione gnomonica che comprende il tracciamento della linea meridiana e la realizzazione di orologi solari orizzontali, verticali e analemmatici. Ogni fase di realizzazione del progetto è stata descritta in modo puntuale in modo da poter essere riprodotta nella prassi di didattica laboratoriale che i docenti intendono mettere in atto[4].

Fig. 2 - Realizzazione di un orologio solare orizzontale e di un orologio analemmatico presso il Liceo Vitruvio (AV), Progetti Reti.

4 Si rimanda alla pagina web *La rete di Eratostene*: <https://eratostene.vialattea.net/wpe/>.

Trigonometria e astronomia

La percezione del cielo e della Terra come oggetti sferici, la necessità di determinare coordinate, velocità e percorsi degli oggetti celesti quali stelle e pianeti, nonché l'uso di nozioni astronomiche ai fini del miglioramento di competenze geografiche e della produzione di calendari civili furono da sempre strettamente legati allo sviluppo di nozioni trigonometriche. In questa sezione, si è condiviso un rapido excursus dell'antica astronomia basandosi sullo sviluppo di modelli del cosmo sempre più articolati, ma basati su elementi di osservazione e calcolo. Questo soprattutto perché la stessa idea di 'modello di mondo' o 'modello di cosmo' si presta bene a una trattazione di stampo matematico-scientifico, artistico, filosofico, letterario. Sul versante matematico-scientifico, si è fatto riferimento a lavori di rilievo internazionale che integrano i rimandi alle fonti primarie con approcci dimostrativi odierni, utili anche a fini didattici, compatibili con il livello di conoscenze degli antichi [Linton, 2004], e con un corredo di esercizi che il docente può utilizzare anche in sede didattica [Evans, 1998]. Può essere opportuno riferirsi agli inizi storici delle nozioni trigonometriche come forma di 'pre-calcolo' trigonometrico, rimarcando come il contesto astronomico dettò specifici problemi [TRIUMPHS Collections: Pre-calculus and Trigonometry, 2017-2023].

Se si guarda allo sviluppo dell'astronomia, la prima necessità fu quella di costruire un sistema di posizionamento e orientamento, che si avvalse molto presto del sistema sessagesimale. Gli studiosi sono concordi nel collegare tale conoscenza all'esperienza degli antichi Babilonesi [Otero, 2022], che con molta probabilità preferirono un sistema di calcolo a base 60 per la numerosità dei divisori di questo numero (5, 10, 12, 15, 20, 30, 60). Mediante questo sistema posizionale, i Babilonesi quantificarono la durata del mese sinodico, relativo al tempo impiegato dalla Luna per allinearsi con il Sole rispetto alla Terra, cogliendone la variazione in periodi diversi dell'anno. Questa variabilità è stata raffigurata dagli studiosi secondo due modalità: intervallando periodi con una diversa ma determinata durata del mese sinodico (Sistema A), oppure assumendo una variazione graduale risultante in un grafico a zig-zag (Sistema B) [Linton, 2004]. Insieme ad altre valutazioni basate sull'osservazione, i Babilonesi furono in grado di assumere quantità come la durata dell'anno siderale e dell'anno tropico[5], cogliendone il problema della mancata conver-

5 Si ricorda che l'anno siderale corrisponde al tempo impiegato dal Sole per tornare nella stessa posizione rispetto allo sfondo delle stelle fisse, mentre l'anno tropico corrisponde al tempo impiegato dal Sole durante l'intero ciclo di stagioni, in genere con riferimento all'equinozio di primavera come punto iniziale.

genza tra i due periodi, come anche colsero la diversa velocità tra gli oggetti celesti. Anche l'ambiente egiziano sviluppò competenze astronomiche. Sia in contesto babilonese che egiziano, tali nozioni astronomiche e il riferimento a ciò che si muove in cielo vennero corredate da narrazioni mitologiche, prive di una mediazione teoretica. L'excursus è proseguito pertanto illustrando quanto accadde con i Greci, prima di tutto dal punto di vista delle nozioni tecniche, utili a determinare in via definitiva la sfericità del cielo e della Terra. Per il cielo, sono stati ripercorsi i principali argomenti basati su osservazioni a occhio nudo, come ad esempio la rotazione delle stelle cosiddette 'fisse', costante e regolare e per questo presto avocata a riferimento dei moti irregolari degli altri pianeti. Per la Terra, tra gli argomenti è stato richiamato quello delle osservazioni delle ombre di Sole, Luna e Terra durante le eclissi, del modo di apparire di una nave all'orizzonte nel suo approssimarsi a riva, o la diversa visibilità delle stelle a seconda della latitudine terrestre. Un collegamento diretto è stato fatto alla determinazione di Eratostene del diametro terrestre, precedentemente trattato. Si è quindi affrontato lo sviluppo dei primi modelli di cosmo, in particolare accennando all'astronomia di Eudosso, Aristarco, Ipparco, Apollonio. A ragione della scarsità delle fonti, il ragionamento è stato svolto cercando di ricostruire le assunzioni che emergono poi dalla letteratura secondaria. Per quanto riguarda Eudosso, si è ricordato l'impiego di misure di angoli all'interno del modello geocentrico a sfere omocentriche, e la sua traducibilità in un sistema di calcolo matriciale [Linton, 2004, p. 30-31]. Per Aristarco, si è potuto vedere come la determinazione dell'angolo tra la Luna, la Terra e il Sole quando la Luna appare illuminata per metà e pari a 87°, determina la possibilità di supporre un sistema non necessariamente geocentrico. Per Apollonio, si è ragionato intorno alla plausibilità di considerare l'equivalenza tra un sistema a deferente ed epiciclo e un sistema a eccentrico, in quanto tale equivalenza è utile nel momento in cui occorre giustificare i punti stazionari e l'andamento retrogrado di un pianeta. Per Ipparco, si è visto come la determinazione dell'ampiezza di angoli derivati da osservazioni, pur sbagliata in quanto ottenuta a occhio nudo, unitamente all'esigenza dimostrativa tipicamente greca, abbia permesso di migliorare le conoscenze astronomiche poi giunte a Tolomeo: è un esempio il calcolo delle relative grandezze di Terra, Sole e Luna, o la descrizione del moto solare e lunare. In questo contesto, può essere interessante comparare la trattazione degli antichi con una trattazione odierna che si avvalga di vettori. Infine, si è tornati brevemente su Tolomeo, ricordando come la nozione di corda gli permise di raffinare il modello geocentrico invalso poi per secoli, applicandolo in modo distinto a pianeti inferiori (Venere e Mercurio) e superiori (Marte, Giove, Saturno) [Evans, 1998, p.

295-296, 411], come anche il moto medio del Sole (ovvero assimilabile a un moto circolare uniforme) distinto dal moto reale [Evans, 1998, p. 231-232], e infine il moto ovoidale di Mercurio [Marcacci, 2023].

Passando a un approccio filosofico e letterario, sempre relativo al tema dei modelli di cosmo e alla sfericità del cielo, si è suggerito di integrare nella didattica la lettura dei primi pensatori (VI-V sec. a.C.) mediante *I frammenti dei Presocratici* [Reale, 2006]. È questa la fondamentale raccolta di fonti e testimonianze del pensiero filosofico dove si possono trovare numerosi punti di raccordo con la storia dell'astronomia. Avendo a cuore di considerare un unico ambiente comune alla nascita delle idee scientifiche e filosofiche, tali punti di raccordo si ritrovano fin dalla lettura del contributo dei Milesi, in quanto Talete, Anassimandro e Anassimene proposero veri e propri modelli di cosmo. Anche un altro Milesio, quale Ecateo, fu importante in quanto attivo nell'elaborazione di conoscenze geografiche. Un posto peculiare meritano anche Parmenide, che tra le tante nozioni attestò che la Luna è illuminata dal Sole, e i Pitagorici, autori di alcune nozioni astronomiche primitive. Si è poi fatto riferimento a Platone e Aristotele, individuando alcuni passaggi interessanti per collegarli a nozioni specifiche di astronomia. Infine, si è fornito un repertorio di autori tardo-antichi e medievali, di lingua greca e latina, dove si conservano nozioni astronomiche e cosmologiche all'interno di opere di astrologia o commentari alla Sacra Scrittura [Dreyer, 2016, cap. 10]; [Brague, 2005]. Si è quindi concluso con la possibilità di riferirsi agli abbondanti rimandi all'astronomia presenti nell'opera di Dante Alighieri[6].

Il legame tra trigonometria e astronomia è stato infine corredato dal resoconto di una esperienza avuta con studenti universitari di discipline filosofiche per costruire una sfera armillare[7]: l'esperienza ha dimostrato l'utilità di materializzare alcuni concetti, soprattutto per quegli studenti che non hanno una preparazione specificamente matematica. L'esperienza si è dimostrata molto utile anche per rimarcare l'importanza del patrimonio scientifico-tecnologico di cui fanno parte esemplari noti di sfere armillari, come anche di sfere terrestri e celesti, garantendo all'esperienza un affaccio sulla storia dell'arte e della tecnica.

6 In particolare, può essere utile consultare la voce *Cielo* in *Enciclopedia dantesca*, vol. VII.

7 Nello specifico ci si è avvalsi dei materiali forniti nella pagina *Una sfera armillare di cartoncino*, tratta dal sito web *La rete di Eratostene*: https://eratostene.vialattea.net/wpe/strumenti/modelli/una-sfera-armillare-di-cartoncino/. Si possono trovare altri suggerimenti di esperienze didattiche attente all'astronomia in Lanciano [2019].

Fig. 3 - Esperienza laboratoriale per la costruzione di una sfera armillare (Corso di Storia della scienza e delle tecniche, Università degli Studi di Urbino, a.a. 2024/25).

Condivisione finale e conclusioni

Al termine del corso si è svolto un momento di confronto e discussione particolarmente proficuo. Alla luce degli stimoli ricevuti, della letteratura esaminata durante gli approfondimenti e dei contenuti condivisi, ci si è prima di tutto chiesti come relazionarsi con il contesto scolastico reale e renderlo capace di accogliere nuove prospettive legate a contenuti e metodologie tipiche della storia della matematica. Proprio la storia della matematica, pur nell'esigenza di rigore richiesta dai suoi contenuti specifici, è in grado sia di mettere le studentesse e gli studenti di fronte alle esigenze del linguaggio formale, sia di mostrare come questo abbia ricadute sulla storia della scienza e più in generale sul pensiero scientifico e filosofico. In particolare, proprio la storia della scienza fornisce contenuti e metodologie adatte alla creazione di laboratori, nei quali le studentesse e gli studenti possono essere coinvolti in prima persona e ai quali possono partecipare in forma collaborativa docenti di varie aree disciplinari.

Considerando i limiti imposti dagli obblighi curriculari, capaci spesso di esautorare le energie didattiche, una possibilità è pensare di sfruttare proprio le attività obbligatorie ed extracurriculari. Per questo è stato unanimemente sottolineato il valore di esperienze formative legate alla storia della scienza in contesto didattico, di orientamento e di attività obbligatorie come il PCTO, in orario curriculare ed extra-curriculare. Ciò non elimina l'eventualità di prevedere, anche nel consueto programma didattico, brevi approfondimenti di storia della scienza che collegano diverse discipline – specie in previsione dell'esame di maturità, quando viene chiesta la costruzione di un percorso interdisciplinare. È stato anche suggerito un momento ulteriore da valorizzare – soprattutto per non avvertirlo come subìto – ovvero l'educazione civica. Lavorare in questa prospettiva interdisciplinare significa rivedere l'orario scolastico e prevedere tempi condivisi. Data la difficoltà concreta nel farlo, vanno pianificate anche altre strategie: ad esempio, si potrebbe sfruttare la settimana di fermo didattico come didattica orientativa. In generale, l'obiettivo è rendere le pratiche burocratiche (si parla addirittura di 'assedio all'ora di lezione') occasioni per dare e creare contenuti, scoprendo anche le cose interessanti che fanno gli altri colleghi. Soprattutto, è fondamentale che siano i docenti ad avere la libertà di sviluppare contenuti e non sentirsi 'ospiti' anziché promotori della loro professione. Non è infine secondario il coinvolgimento degli studenti.

Alla luce di queste considerazioni introduttive e dei temi affrontati nel corso, la discussione è andata orientandosi lungo tre linee di riflessione che si sono costantemente intrecciate nel corso della discussione.

- Fino a che punto un approccio storico può coinvolgere studentesse e studenti che hanno difficoltà in matematica e nelle discipline scientifiche? Con quali obiettivi?
- Comprendere la matematica e le discipline scientifiche nella loro dimensione evolutiva, permette di capirne il ruolo nello sviluppo della cultura filosofica, artistica, letteraria?
- Studiare il modo in cui la trigonometria ha avuto applicazioni pratiche, può favorirne l'apprendimento?

È stato osservato che varrebbe davvero la pena progettare un percorso trasversale di approfondimento storico-tematico sulla scienza in età ellenistica, in particolare ad Alessandria, eventualmente in orario extra-curricolare ma nelle 30 ore di orientamento. Lo stimolo iniziale, nonché la domanda finale, potrebbe trarre spunto dal testo di [Lucio Russo, 2009]: possiamo parlare di 'rivoluzione dimenticata'? O dobbiamo difendere le specificità della scienza antica rispetto a quella moderna?

È stata dunque presentata *Reti*, che è il titolo della XXI edizione della Settimana Scientifica e Tecnologica organizzata dal Liceo Scientifico Statale 'M. Vitruvio P.' di Avezzano (AQ). Si tratta di una serie di conferenze, ma soprattutto laboratori aperti, realizzati dagli studenti e curati da docenti di Scienze Naturali, Matematica e Fisica, Filosofia, Lettere, Scienze Motorie e Storia dell'Arte. In questo modo i ragazzi sviluppano competenze trasversali, incluse competenze comunicative nel caso di laboratori di teatro, o competenze pratiche nella costruzione di strumenti. Sono state quindi condivise esperienze dove la storia della scienza può aiutare ad appropriarsi di contenuti di fisica: mostrare il contesto storico permette di collocare un problema di fisica, matematica, biologia dando alla parte tecnica quella consapevolezza culturale, pratica, filosofica che il più delle volte sfugge, deprivando la scienza della sua dimensione culturale. Analogamente, la storia della scienza aiuta a impadronirsi di concetti di matematica: nel primo Liceo Scientifico N. Rodolico di Firenze sono stati presentati i sistemi di numerazione antica, ragionando sulle basi aritmetiche. Cosa sarebbe potuto accadere se si fosse usato un altro sistema, se avessimo avuto 8 e non 10 dita? Queste domande hanno reso vivace l'apprendimento e meno nozionistica la presentazione del tema. Dal tema storico si è poi passati più facilmente allo studio dell'aritmetica.

Ovviamente occorre tenere presente che per quanto riguarda argomenti molto specifici, a volte neanche l'approccio storico è di aiuto. La storia della scienza, in vario modo, può rendere l'apprendimento più efficace, sapendo che quella tecnica può non venir assorbita ed occorre pertanto pianificare tempi congrui di didattica disciplinare. Per integrare le due esigenze, si può introdurre un concetto nella sua evoluzione: ovviamente sarebbe ideale rispettare il formalismo della matematica e della scienza di quel tempo, ma è forse più utile ricorrere a strumenti formali contemporanei, già presenti in programmazione, per mostrare il modo odierno di studiare questioni antiche. Occorre infatti ammettere che realisticamente nelle ore mattutine a scuola non si può andare oltre a una storia epistemologica della scienza. È quasi impossibile fare storia della scienza usando il formalismo antico, sebbene vada comunque mostrato, spiegando la connessione con il formalismo moderno. In questo senso, sono state riportate esperienze didattiche svolte presso il Liceo Curie-Levi di Collegno (TO) nelle quali la didattica è stata inquadrata nella prospettiva della *circolarità*, ovvero mostrando il presente in collegamento con il passato per tornare infine al presente. Ovviamente, ci sono scuole in cui la scienza antica potrebbe essere avvicinata mediante lo studio del latino e del greco, cosa che ne permetterebbe un'ulteriore spendibilità. Infine, è stata condivisa l'esperienza di un quinto liceo scientifico, sempre nel Liceo Scientifico N. Rodolico di Firenze, dove si è svolto un approfondimento sul concetto di 'epistemologia': l'attività è stata davvero istruttiva e ha dato agli studenti gli strumenti per iniziare a distinguere ciò che si riferisce alla scienza in quanto *fiction* da ciò che è davvero scienza.

In conclusione, è emersa con forza e vivacità la volontà di difendere la professione docente, apprezzandone tutti gli stimoli e le opportunità, rafforzando la convinzione che laddove ci sono 'spazi burocratici' imposti essi vanno comunque occupati con contenuti interessanti. Laddove questo processo è stato avviato, inizialmente è servita una certa pazienza e costanza ma si sono poi raccolti risultati davvero soddisfacenti.

Appendice: Scheda del progetto

SISS Scuola **Percorsi di formazione per personale docente**	
Titolo	*Angoli, triangoli e misure: un approccio interdisciplinare per l'innovazione didattica*
Descrizione	Come rendere accattivante lo studio degli angoli e dei triangoli che sta alla base della trigonometria presente in tutti i programmi delle materie scientifiche nelle scuole secondarie? Il corso attinge a metodi e contenuti della storia della matematica e della scienza per rendere l'apprendimento di questo studio più agile e attrattivo, oltre che utile per l'insegnamento di discipline umanistiche. Si studieranno alcuni casi elementari e avanzati della trigonometria nelle loro origini e sviluppi storici e in alcune applicazioni pratiche. Sarà fondamentale per l'efficacia dell'apprendimento il taglio interdisciplinare volto a individuare le connessioni tra trigonometria, letteratura, storia, filosofia e arte. Infine, sarà essenziale l'approccio laboratoriale per potenziare le abilità pratiche individuali e sociali. In questo modo, ai partecipanti saranno forniti molti elementi utili a una didattica innovativa in contesto STEAM e interdisciplinare.
Durata in ore	10 ore strutturate in: -6 ore di lezioni frontali -2 di approfondimento personale o di gruppo -2 di condivisione e restituzione finale.
N° massimo iscritti	40
A chi si rivolge	Docenti della scuola secondaria di primo e secondo grado di tutte le discipline
Competenze di accesso richieste	Nessuna particolare competenza
Ambiti disciplinari coinvolti (indicarne un massimo di 5)	AMBITI TRASVERSALI 1. Didattica e metodologie; 2. Innovazione didattica e didattica digitale; 3. Metodologie e attività laboratoriali; 4. Didattica per competenze e competenze trasversali. AMBITI SPECIFICI 1. Bisogni individuali e sociali dello studente; 2. Sviluppo della cultura digitale ed educazione ai media; 3. Didattica singole discipline previste dagli ordinamenti; 4. Inclusione scolastica e sociale.

Competenze didattiche trasversali	Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare. Competenza in materia di cittadinanza e pensiero critico. Competenza imprenditoriale da parte del docente nella costruzione del curricolo e di design disciplinare e trasversale. Competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali.
Obiettivi formativi / mappatura delle competenze:	**Obiettivi generali:** Valorizzare i contenuti tecnici e scientifici nel loro portato interdisciplinare e culturale Esplorare la storia della scienza come ambito di apprendimento trasversale e interdisciplinare per la scuola secondaria di secondo grado. Approfondire e prendere confidenza con aspetti didattici legati alla storia delle scienze in un'ottica trasversale. Apprendere tecniche e tematiche integrabili nella didattica disciplinare per promuovere negli studenti life-long learning skills quali il pensiero critico e l'apprendimento cooperativo. Sviluppare la capacità di progettare percorsi didattici multifocali e multidisciplinari. Migliorare le proprie capacità di lavoro e progettazione didattica collaborativa. Iniziare a sviluppare una modalità di approccio trasversale alle discipline scientifiche e umanistiche utilizzando tematiche relative alla storia della scienza. **Obiettivi specifici:** Potenziare le proprie conoscenze nell'ambito della storia della scienza, in particolare relative alle importanti relazioni storiche tra scienze e altri ambiti della cultura (focus annuale: letteratura, arti, storia del pensiero scientifico e filosofico). Migliorare la propria capacità di ricerca in ambito storico orientandola in senso trasversale. Scoprire e approfondire le potenzialità offerte dalla storia della scienza per il dialogo transdisciplinare e per arricchire la didattica delle discipline scientifiche. Conoscere e problematizzare alcune tematiche specifiche relative all'interazione storica tra scienza, lettere e arti.
Modalità di erogazione del corso	On line – la piattaforma sarà indicata successivamente Lezioni in forma plenaria: 60% (6 ore su 10) Laboratorio individuale o di gruppo: 20% (2 ore su 10) Restituzione finale: 20% (2 ore su 10)
Tipologia di verifica	Progettazione di una U.D.A. condivisa tra pari. Restituzione tra pari.
Periodo di svolgimento (calendario e sede)	Gennaio/Febbraio 2025
Frequenza minima necessaria per il riconoscimento	75% (pari a 15 ore – la partecipazione al laboratorio di progettazione condivisa è mandatoria)

Piano didattico

Lo svolgimento del corso sarà erogato in tre lezioni con approccio focalizzato alla matematica e all'interdisciplinarietà. Durante le lezioni saranno mostrate delle attività laboratoriali associate ai contenuti studiati.
I partecipanti dovranno elaborare una U.D.A., singolarmente o in gruppi di lavoro. Nell'incontro finale i partecipanti condivideranno il progetto di U.D.A.

Calendario e argomenti

Data	**Titolo lezione**	**Parte I**	**Parte II**	**Laboratorio**
27 gennaio 2025, h.16.00-18.00	*Le origini della trigonometria attraverso le fonti storiche*	L'*Almagesto* di Tolomeo: contenuti e tradizione	*Excursus* sui contributi indiani e arabi	Costruzione del plinto di Tolomeo
3 febbraio 2025, h.16.00-18.00	*Triangoli e misure di spazio e tempo.*	Da Eratostene a Commandino: misurare il tempo con le ombre.	Il sole, le ombre e gli strumenti di misurazione dell'arte e nella letteratura	Come costruire un orologio solare
10 febbraio 2025, h.16.00-18.00	*Trigonometria e stelle.*	Orientarsi in cielo e in terra: il cielo sferico degli antichi e la tecnica delle corde di Tolomeo.	Il cielo sferico nel pensiero antico e nella letteratura: da Parmenide a Dante Alighieri.	Elementi per conoscere e costruire una sfera armillare.
Lavoro personale e di gruppo	Elaborazione di una U.D.A.			
24 febbraio 2025, h.16.00-18.00	Restituzione finale			

Iscrizioni	Dal 1° ottobre 2024 al 26 gennaio 2025.
Attestato finale	La SISS rilascerà un attestato finale che attesti la partecipazione al corso.
Contatti Nome, cognome, email di chi tiene il corso o fa da riferimento	Per iscrizioni e informazioni scrivere indicando in oggetto *"Angoli, triangoli e misure"* a: scuola@societastoriadellascienza.it Per ulteriori informazioni: Flavia Marcacci flavia.marcacci@uniurb.it

Bibliografia

Arcavi, 2023 = Arcavi Abraham, *Let's talk history…„* in *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by Michal Ayalon, Boris Koichu, Roza Leikin, Laurie Rubel, Michal Tabach, 2023, p. 1–15.

Arcavi, 2025 = Arcavi Abraham, *History of Mathematics as a component of Mathematical Knowledge for Teachers*, in *History, Epistemology in Mathematics Education. Trends, Practices, Future Developments*, edited by Barbin Évelin, Fried Michael N., Menghini Marta, Tortoriello Francesco Saverio, Springer, 2025, p. 305–320.

Arcavi, Masami, 2007 = Arcavi Abraham, Masami Isoda, *Learning to listen: from historical sources to classroom practice*, «Educational Studies in Mathematics», 66 (2007), p. 111–120.

Barbin *et al.*, 2018 = Barbin Évelyne, Guichard Jean, Moyon Marc, Guyot Patrick, Morice-Singh Catherine, Métin Frédéric, Bühler Martine, Tournès Dominique, Chorlay Renaud, Hamon Gérard (eds.), *Let History into the Mathematics Classroom*, Springer, 2018.

Barbin *et al.*, 2025 = Barbin Évelyne, Fried Michael N., Menghini Marta, Tortoriello Francesco Saverio (eds.), *History, Epistemology in Mathematics Education. Trends, Practices, Future Developments*, Springer, 2025.

Berggren, 2016 = Berggren John Lennart, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer, 2016, 2. ed. (1. ed. 1986).

Brague, 2005 = Brague Rémi, *La saggezza del mondo. Storia dell'esperienza umano dell'universo*, Rubbettino, Soveria Mannelli, 2005 (ed. or. *The wisdom of the world: the human experience of the universe in Western thought*, Chicago, Chicago University Press, 2003).

Costi	Iscrizione gratuita.

Brummelen, 2009 = Brummelen Glen Van, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: the early history of trigonometry*, Princeton, NJ, and Oxford, Princeton University Press, 2009.
Brummelen, 2013 = Brummelen Glen Van, *Heavenly Mathematics. The forgotten Art of Sphaerical Trigonometry*, Princeton, NJ, and Oxford, Princeton University Press, 2013.
Brummelen, 2021 = Brummelen Glen Van, *The Doctrine of Triangles. History of Modern Trigonometry*, Princeton, NJ, and Oxford, Princeton University Press, 2021.
Chorlay, Clark, Tzamakis, 2022 = Chorlay Renaud, Clark Michelle Kathleen, Tzamakis Constantinos (eds.), *Exploring the significance of the history of mathematics in mathematics education*, «ZDM Mathematics Education», numero monografico, vol. 54, (7) 2022.
Ciocci, 2021 = Ciocci Argante, *Federico Commandino filologo e matematico. L'edizione del De analemmate di Tolomeo,* «GALILAEANA», XVIII, 2021, p. 65-94.
Cleomede, 1990 = Cleomede, *Cleomedis Caelestia*, Robert Todd (ed.), Leipzig, Teubner, 1990.
Dreyer, 2016 = Dreyer John Louis Emil, *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Bologna, Odoya, 2016 (traduzione Italiana, Milano, Feltrinelli, 1970; ed. originale: *History of the planetary system from Thales to Kepler*, New York, Dover Publ., 2019, 1953[1]).
Enciclopedia dantesca, diretta da Francesco P. Casavola, 16 voll., Milano, Treccani 2005.
Evans, 1998 = Evans James, *The History and Practise of ancient astronomy*, Oxford, Oxford University Press, 1998.
Fauvel, Van Maanen, 2002 = Fauvel John, Van Maanen Jan (eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer Academic Publisher, New York, 2002.
Furinghetti, Radford, 2002 = Furinghetti Fulvia, Radford Luis, *Historical conceptual development and the teaching of mathematics from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice*, in English Lyn (ed.) *Handbook of international research in mathematics education*, New Jersey, Lawrence Erlbaum, 2002, p. 631-634.
Furinghetti, Radford, Katz, 2007 = Furinghetti Fulvia, Radford Luis, Katz Viktor (eds.), *The History of Mathematics Education: Theory and Practice*, «Educational Studies in Mathematics», numero monografico, vol. 66, 2007.
International Study Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics, https://hpm.sites.uu.nl/esu/ (ultima consultazione: 13

ottobre 2025)

Katz, 2000 = Katz Viktor (ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, The Mathematical Association of America, 2000.

Lanciano, 2019 = Lanciano Nicoletta, *Strumenti per i giardini del cielo*, Trieste, Asterios, 2019.

La rete di Eratostene, sito web: <https://eratostene.vialattea.net/wpe> (ultima consultazione: 13 ottobre 2025).

Linton, 2004 = Linton Christopher, *From Eudoxus to Einstein A History of Mathematical Astronomy*, Cambridge, Cambridge University Press, 2004.

Marcacci, 2023 = Marcacci Flavia, Models for Mercury and the *theorica* of Girolamo della Volpaia, in *Proceedings of the 42nd SISFA Annual Conference. Perugia 26-29 September 2022*, Pisa, 2023, p. 32-39. Available at: <https://www.sisfa.org/pubblicazioni/atti-del-xlii-convegno-annuale-sisfa/>.

Otero, 2022 = Otero Danny, *The Trigonometric Functions Through Their Origins: Babylonian Astronomy and Sexagesimal Numeration, in TRIUMPHS Collections: Pre-calculus and Trigonometry*, 2022.

Pappo, 1858 = Pappo di Alessandra, *Pappi Alexandrini Collectionis quæ supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Volumen I, Insunt librorum II, III, IV, V reliquiae Berolini, apud Weidmannos, MDCCCLXXVI; Volumen II, *Insunt librorum VI et VII reliquiae,* Berolini, apud Weidmannos, MDCCCLXXVII. Volumen III, *Insunt liber VIII reliquiae Supplementa in Pappi Collectionem,* Berolini, apud Weidmannos, MDCCCLXXVIII

Ptolemaus, 1515 = Ptolemaeus Claudius, *Almagestum*, Opus ingens ac nobile omnes Celorum motus continens. Felicibus Astris eat in lucem, Petrus Liechtenstein, Venetiis, 1515.

Reale, 2006 = *I Presocratici. Prima traduzione integrale con testi originali a fronte delle testimonianze e dei frammenti nella raccolta di Hermann Diels e Walther Kranz*, a cura di Giovanni Reale, Milano, Bompiani, 2006.

Repellini, 1980 = Repellini Ferruccio Franco, *Cosmologie greche*, Torino, Loescher, 1980.

Russo, 2009 = Russo Lucio, *La rivoluzione dimenticata*, Milano, Feltrinelli, 2009 (1. ed. 1996).

Skemp, 1976 = Skemp Richard, *Relational understanding and instrumental understanding*, Mathematics Teaching, 1976, 77, p. 20-26.

Tolomeo, 1562 = *Claudii Ptolemaei liber de Analemmate, a Federico Commandino Urbinate instauratus, et Commentariis illustratus. Qui nunc primum eius opera a tenebris in lucem prodit. Eiusdem Federici Commandini liber de Horologium descriptione,* Romae, Apud Paulum Manutium Aldi F., 1562.

Toomer, 1998 = Toomer Gerald James, *Ptolemy's Almagest,* translated and annotated by G. J. Toomer, with a foreword by Owen Gingerich, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1998.

TRIUMPHS, 2017-2023 (= TRansforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources) Collections: Pre-calculus and Trigonometry, Digital Commons, Ursinus College, disponibile all'URL (ultima consultazione: 13 ottobre 2025): Pre-calculus and Trigonometry | Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources (TRIUMPHS) | Ursinus College

Vitruvio, 1997 = Vitruvio Pollione Marco, *De architectura*; edited by Pierre Gros, traduzioni di Antonio Corso, Elisa Romano, contributi di Maria Losito, Torino, Einaudi, 1997.